Квадратные уравнения

Вступление.

- Данная работа может быть использована на обобщающем уроке по теме «Решение квадратных уравнений»с целью повторения и обобщения изученного материала
- Отдельные части работы могут быть использованы и на обучающих уроках или во внеклассной работе с целью ознакомления с дополнительными сведениями.

Содержание:

Теоретические сведения

- Определение квадратного уравнения
- Примеры квадратных уравнений.
- Алгоритм решения квадратного уравнения по формуле

Определение квадратного уравнения.

- *Квадратным уравнением* называется уравнение вида $ax^2+вx+c=0$, где x – переменная, а,в,с – некоторые числа, причем $a\neq0$.
- Числа а, в, с – коэффициенты квадратного уравнения. Число а – *первый коэффициент*, в – *второй коэффициент*, с – *свободный член*.
- Если в квадратном уравнении $ax^2+вx+c=0$ хотя бы один из коэффициентов в или с равен нулю, то такое уравнение называется *неполным квадратным уравнением.*
- Квадратное уравнение, в котором коэффициент а=1 называется *приведенным квадратным уравнением.*

Примеры квадратных уравнений:

- Например: а) $-x^2+6x+1,2=0$, где $a=-1$, $в=6$, $c=1,2$;

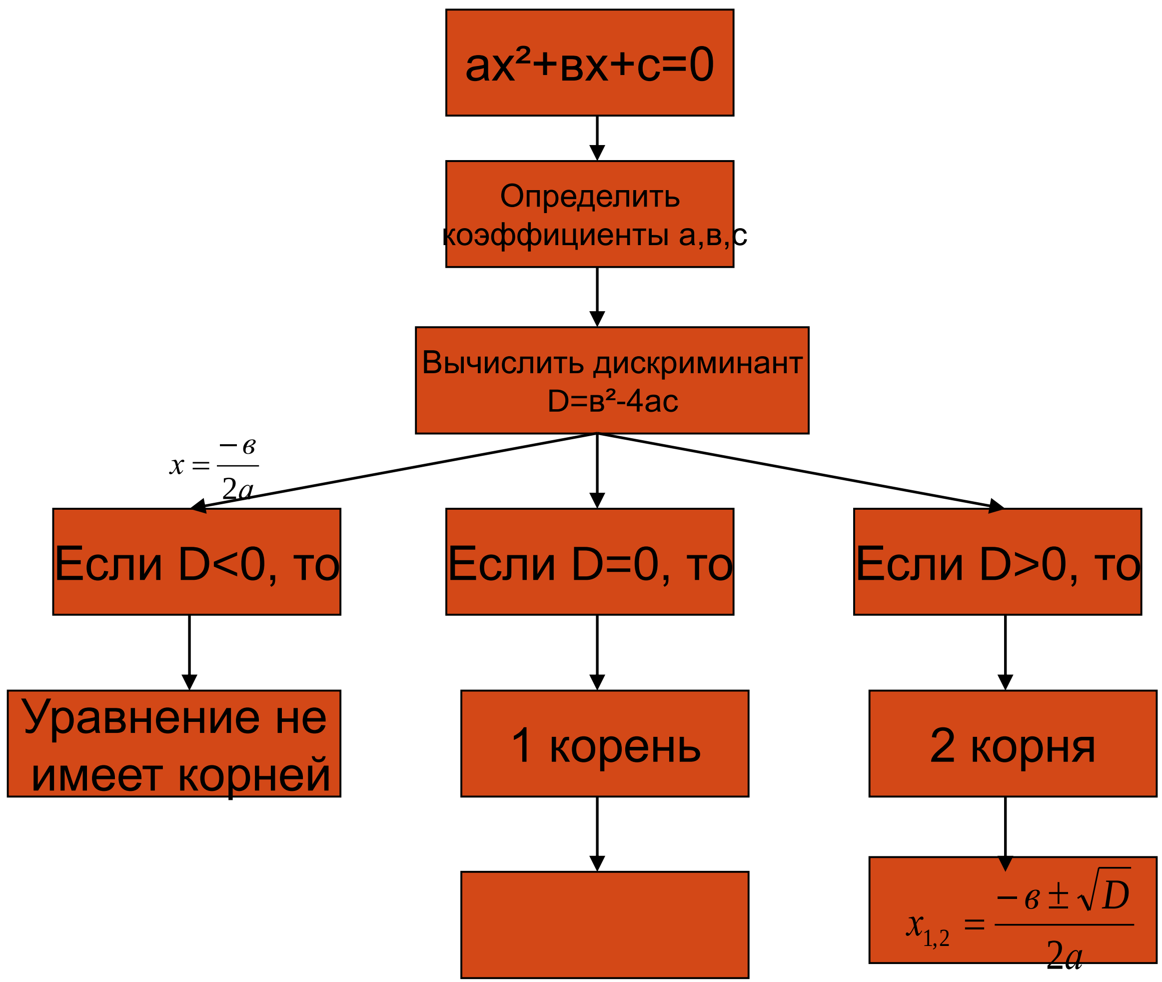
б) $5x^2-2=0$ – неполное квадратное уравнение, где $a=5$, $в=0$, $c=-2$;

в) $-3x^2+7x=0$ - неполное квадратное уравнение, где $a=-3$, $в=7$, $c=0$;

г) $7x^2=0$ - неполное квадратное уравнение, где $a=7$, $в=0$, $c=0$;

д) $x^2+4x-12=0$ – приведенное квадратное уравнение, где $a=1$, $в=4$, $c=-12$.

Алгоритм решения квадратного уравнения:



Примеры решения квадратных уравнений по формуле

Пример1: $3x^2+11x+6=0$ а=3; в=11;с=6.

D=11^2-4*3*6=121-72=49>0 – уравнение имеет 2 корня

$$x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{49}}{2*3}=\frac{-11\pm 7}{6}$$

$$x_1=\frac{-11-7}{6}=-3;$$

$$x_2=\frac{-11+7}{6}=-\frac{2}{3}$$

Примеры решения квадратных уравнений по формуле:

- Пример2. $9x^2-6x+1=0$

  а=9; в=-11;с=1.

  $D=(-6)^2-4*9*1=36-36=0=0$ – уравнение имеет 1 корень.

  $$X=\frac{-(-6)}{2*9}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

Примеры решения квадратных уравнений по формуле:

- Пример 3: $-2x^2+3x-5=0$

  а=-2; в=3;с=-5.

  $D=3^2-4*(-2)*5=9-40=-31<0$ – уравнение не имеет корней.

Это интересно (дополнительные сведения о нахождении корней квадратного уравнения в особых случаях):

- 1 случай. Если $a+b+c=0$, то x1=1; x2= c/a
- 2 случай. Если $a-b+c=0$, то x1=-1; x2= -c/a
- Нахождение корней приведенного квадратного уравнения: $x^2+px+q=0$. здесь полезно воспользоваться формулой:

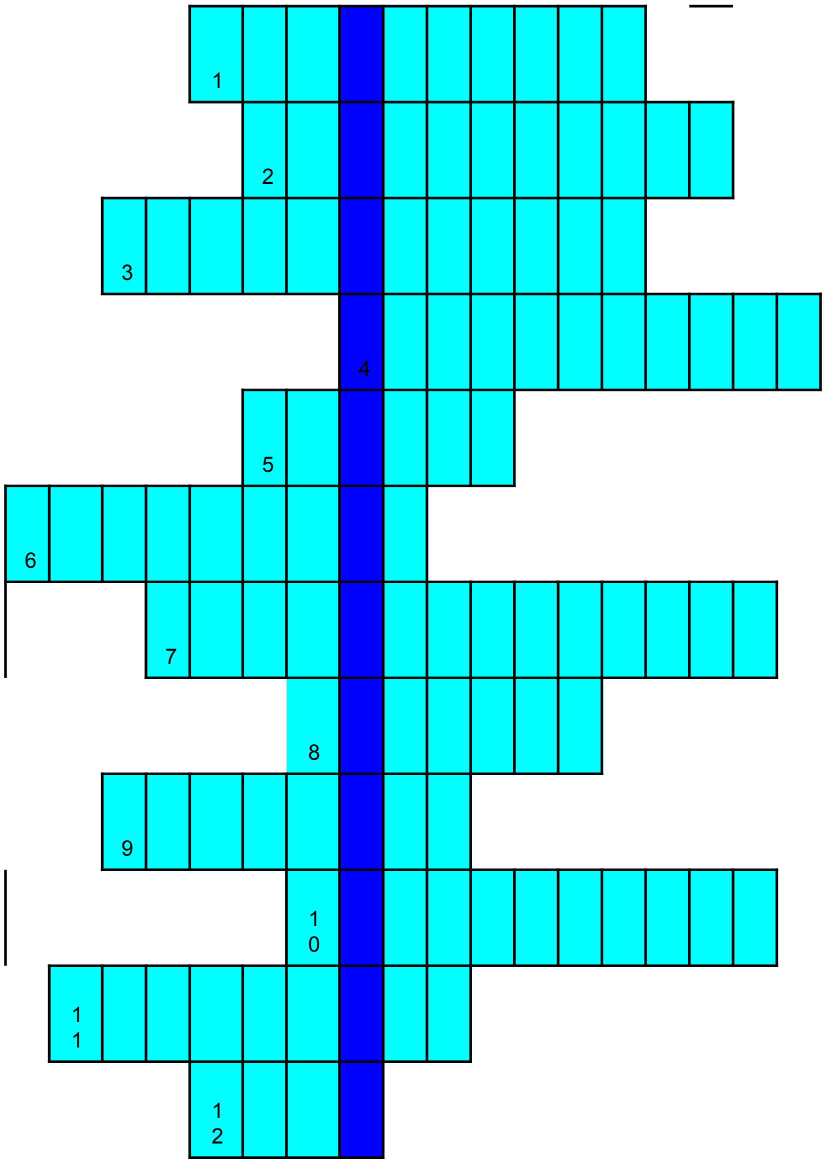
$$x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$$

- Формула запоминается надолго, если выучить ее в стихотворной форме:

Стихотворение для запоминания формулы $x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$

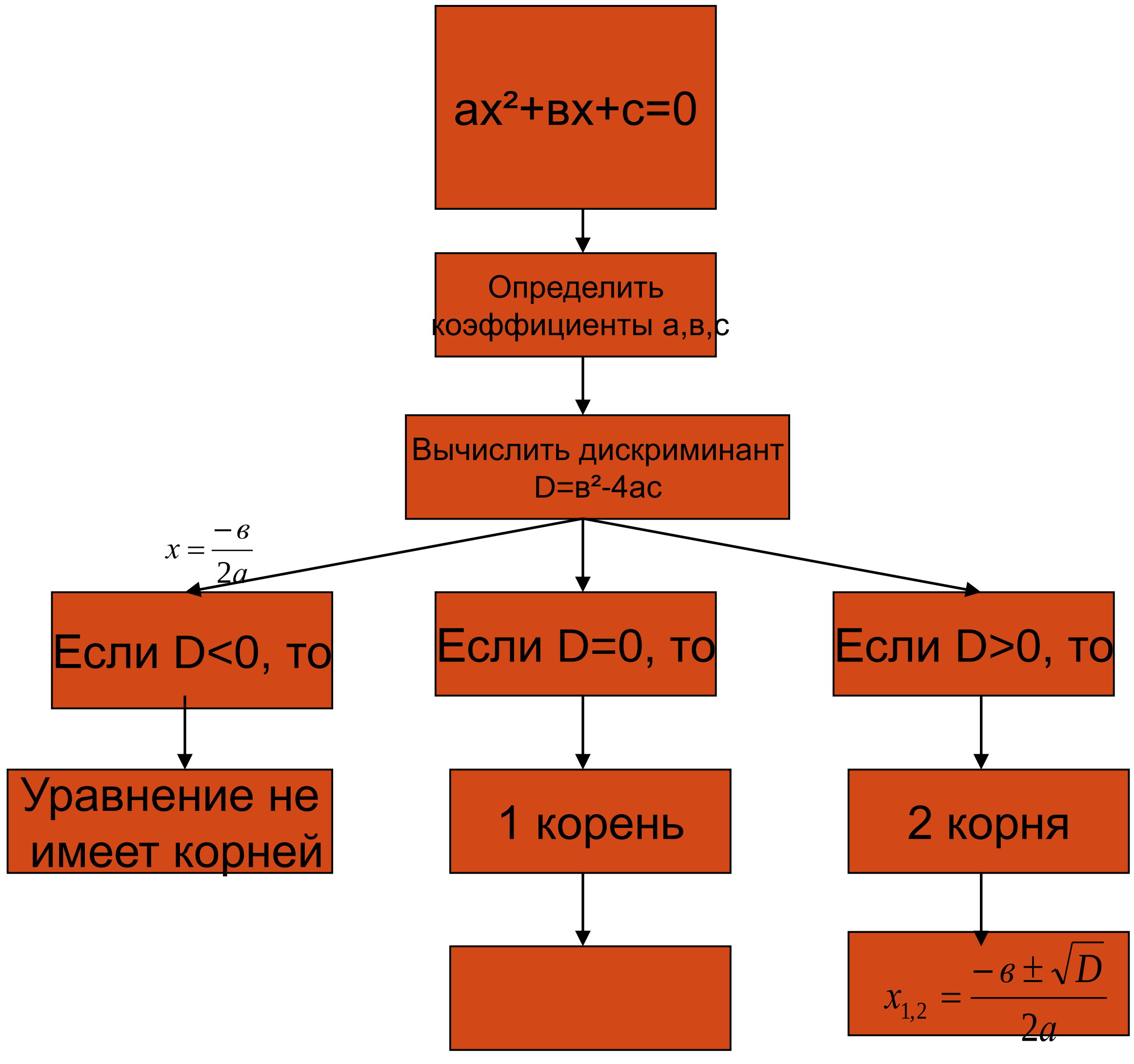
«Пэ», со знаком взяв обратным,
На два мы его разделим.
И от корня аккуратно
Знаком минус-плюс отделим.
А под корнем, очень кстати,
Половина «пэ» в квадрате,
Минус «ку». И вот решенье
Небольшого уравненья.

Кроссворд



- 1. Уравнение вида $ах^2+вх+с=о$
- 2.Квадратные уравнения, у которых первый коэффициент равен 1.
- 3. Уравнения с одной переменной, имеющие одни и те же корни.
- 4. Числа а,в и с в квадратном уравнении.
- 5. Значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.
- 6. Равенство, содержащее неизвестное.
- 7. Неотрицательное значение квадратного корня.
- 8. Древнегреческий математик, который нашел приемы решения квадратных уравнений без обращения к геометрии.
- 9. Квадратное уравнение, в котором хотя бы один из коэффициентов в или с равен 0.
- 10. «Дискриминант» - по-латыни.
- 11. Коэффициент с квадратного уравнения.
- 12. Французский математик, который вывел формулы, выражающие зависимость корней уравнения от его коэффициентов.

- Если вы разгадаете этот кроссворд верно, то сможете в выделенном вертикальном столбце прочитать термин, относящийся к теме.


$ax^2+вx+c=0$
Определить коэффициенты а,в,с
Вычислить дискриминант $D=в^2-4ac$
$x=\frac{-в}{2a}$
Если D<0, то
Если D=0, то
Если D>0, то
Уравнение не имеет корней
1 корень
2 корня
$x_{1,2}=\frac{-в\pm\sqrt{D}}{2a}$

Из истории решения квадратных уравнений.

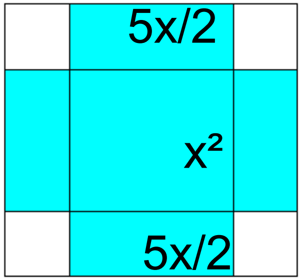
- Уравнения 2-ой степени умели решать еще в Древнем Вавилоне во II тысячелетии до н.э. Математики Древней Греции решали квадратные уравнения геометрически; например, Евклид – при помощи деления отрезка в среднем и крайнем отношениях. Задачи, приводящие к квадратным уравнениям, рассматриваются во многих древних математических рукописях и трактатах. Например.

Из истории решения квадратных уравнений.

- Формула корней квадратного уравнения «переоткрывалась» неоднократно. Один из первых дошедших до наших дней выводов этой формулы принадлежит индийскому математику Брахмагупте (около 598 г.).
- Среднеазиатский ученый ал-Хорезми (IX в.) в трактате «Китаб аль-джебр валь -мукабала» получил эту формулу методом выделения полного квадрата с помощью геометрической интерпретации.

Вывод формулы корней квадратного уравнения ал-Хорезми:

- Суть его рассуждений видна из рисунка (рассматривается решение уравнения $x^2+10x=39$. Площадь большого квадрата равна $(x+5)^2$. Она складывается из площади x^2+10x фигуры, закрашенной голубым цветом, равной левой части рассматриваемого уравнения, и площади четырех квадратов со стороной 5/2, равной 25. Таким образом, $(x+5)^2=39+25$; $x1=3$; $x2=-13$.

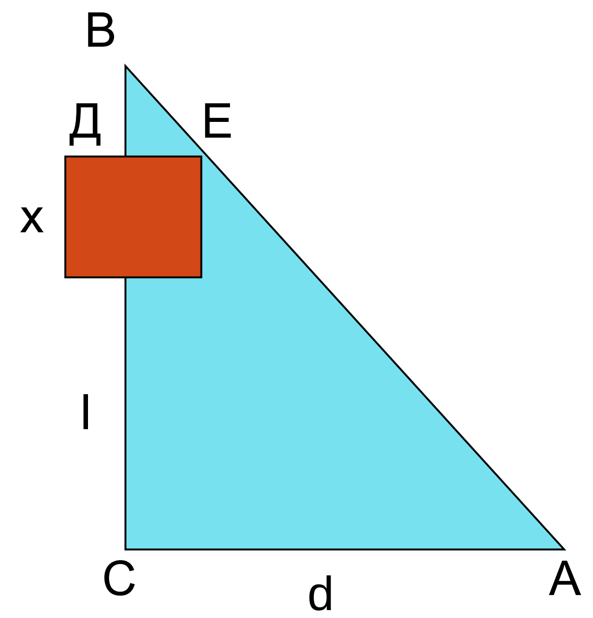


Задача из китайского трактата «Математика в девяти книгах»(примерно II в.до н.э.)

- «Имеется город с границей в виде квадрата со стороной неизвестного размера, в центре каждой стороны находятся ворота. На расстоянии 20 бу(1 бу=1,6 м) от северных ворот (вне города) стоит столб. Если пройти от южных ворот прямо 14 бу, затем повернуть на запад и пройти еще 1775 бу, то можно увидеть столб. Спрашивается: какова сторона границы города?»

Решение задачи о границах города:

- Обозначим сторону квадрата через x. Из подобия треугольников BED и ABC (см.рис.) получим: k/0.5x=(k+x+l)/d.
- Поэтому, чтобы определить неизвестную сторону квадрата, получаем квадратное уравнение x2+(k+l)-2kd=0.
- В данном случае уравнение имеет вид x2+34x-71000=0, откуда x=25000 бу.
- Отрицательных корней (в данном случае x=-284) китайские математики не рассматривали, хотя в этом же трактате содержатся операции с отрицательными числами.



Диофант Александрийский (около 3 в.).

- Древнегреческий математик. В основном труде «Арифметика» (сохранились 6 книг из 13), дал решение задач, приводящихся к т.н. диофантовым уравнениям, и впервые ввел буквенную символику в алгебру.

Евклид
(3 в. До н.э.)

- Древнегреческий математик, работал в Александрии. Лавный труд «Начала»(15 книг), содержит основы античной математики, элементарной геометрии, теории чисел, общей теории отношений и метода определения площадей и объемов, включавшего элементы теории пределов, оказал огромное влияние на развитие математики.

Аль-Хорезми.

- Наибольших успехов в математике достиг согдиец Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми (то есть, родом из Хорезма - с берегов Сыр-Дарьи). Он работал в первой половине 9 века и был любимцем ученейшего из халифов - Маамуна (сына знаменитого Гаруна ар-Рашида). Главная книга Хорезми названа скромно: "Учение о переносах и сокращениях", то есть техника решения алгебраических уравнений. По-арабски это звучит "Йльм аль-джебр ва"ль-мукабала"; отсюда произошло наше слово "алгебра".
- Другое известное слово - "алгоритм", то есть четкое правило решения задач определенного типа - произошло от прозвания "аль-Хорезми". Третий известный термин, введенный в математику знаменитым согдийцем - это "синус", хотя в этом деле не обошлось без курьеза.
- В алгебраическом трактате ал-Хорезми дается классификация линейных и квадратных уравнений. Автор насчитывает 6 видов уравнений, выражая их следующим образом:
- «Квадраты равны корням», т. е. ах2 = bх.
- «Квадраты равны числу», т. е. ах2 = с.
- «Корни равны числу», т. е. ах = с.
- «Квадраты и числа равны корням», т. е. ах2 + с = bх.
- «Квадраты и корни равны числу», т. е. ах2 + bх =с.
- «Корни и числа равны квадратам», т. е. bх + с == ах2.
- Для ал-Хорезми, избегавшего употребления отрицательных чисел, члены каждого из этих уравнений слагаемые, а не вычитаемые. При этом заведомо не берутся во внимание уравнения, у которых нет положительных решений. Автор излагает способы решения указанных уравнений, пользуясь приемами ал-джабр и ал-мукабала. Его решение, конечно,не совпадает полностью с нашим. Уже не говоря о том, что оно чисто риторическое, следует отметить, например, что при решении неполного квадратного уравнения первого вида ал-Хорезми, как и все математики до XVII в., не учитывает нулевого решения, вероятно, потому, что в конкретных практических задачах оно не имеет значения. При решении полных квадратных уравнений ал-Хорезми на частных числовых примерах излагает правила решения, а затем их геометрические доказательства.

Рефлексия

1. Какое впечатление о нашем уроке?
2. Оцените свою деятельность на уроке?
3. Как вы себя чувствовали на уроке?

Ответы к кроссворду:

- 1. Квадратное.
- 2. Приведенное.
- 3. Равносильное.
- 4. Коэффициент.
- 5. Корень.
- 6. Уравнение.
- 7. Арифметический.
- 8. Диофант.
- 9. Неполное.
- 10. Различитель.
- 11. Свободный.
- 12. Виет.
- В выделенном столбце : ДИСКРИМИНАНТ

Домашнее задание.

Повторить п.22, № 543,№ 544

Спасибо за внимание!